ENSA-ALHOCEIMA **CP II**
ANALYSE 3 **SEMESTRE 1**

Exercice1 :

Montrer que pour tous nombres réels x et y on a :

$$|x-y| \geq \big||x|-|y|\big|$$

Exercice2 :

Soit E un ensemble non vide et d une distance.

Montrer que :

1- $\forall (x,y,z)\epsilon E^3$: $d(x,y) \geq |d(x,z)-d(z,y)|$
2- $\forall (x_1,x_2,\dots,x_n)\ \epsilon E^n$: $d(x_1,x_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i,x_{i+1})$

Exercice3 :

Soit E l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2.

Pour $P(x) = ax^2+bx+c$ et $Q(X) = a'x^2+b'x+c'$ dans E , on pose :

$$\begin{cases} d(P,Q)=3 & si\ \ a \neq a' \\ d(P,Q)=2 & si\ \ a=a'\ et\ \ b\neq b' \\ d(P,Q)=1 & si\ \ a=a'\ ,b=b'\ et\ c\neq c' \\ d(P,Q)=0 & si\ \ P=Q \end{cases}$$

Montrer que d est une distance sur E.

Exercice4:

Sur l'espace vectoriel $IK[X]$ des polynômes réels ou complexes, on définit les normes suivantes:

Pour $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$:

$$N_1(P) = \sum_{i=0}^{n}|a_i|\ ,\quad N_2(P) = \left(\sum_{i=0}^{n}|a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\quad et\quad N_\infty(P) = sup_{0\leq i\leq n}|a_i|$$

1- Montrer que $N_\infty \leq N_2 \leq N_1$
2- On considère la suite de polynômes$(P_n)_{n\epsilon IN}$ définie par :

$$P_n(X) = 1+X+\cdots+X^n$$

   a- Calculer $\frac{N_2}{N_\infty}(P_n)$ et $\frac{N_1}{N_2}(P_n)$
   b- Ces normes peuvent-elles être équivalentes ? justifier.

Exercice5 :

Soit $(E,\|\ \ \|_E)$ et $(F,\|\ \ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés et soit $f: E\to F$ une application et $a\epsilon E$.

Montrer que si *f*(*x*) admet une limite lorsque x tend vers a, alors cette limite est unique.